

01;05;06

## Периодический прерывистый режим граничного трения

© А.В. Хоменко, Я.А. Ляшенко

Сумский государственный университет,  
40007 Сумы, Украина  
e-mail: khom@mss.sumdu.edu.ua, nabla04@ukr.net

(Поступило в Редакцию 25 мая 2009 г.)

В рамках модели Лоренца для аппроксимации вязкоупругой среды исследуется плавление ультратонкой пленки смазки в процессе трения между двумя твердыми атомарно-гладкими поверхностями. Для трех граничных соотношений между значениями времени релаксации сдвиговых напряжений и деформации, а также температуры получены дифференциальные уравнения второго порядка, описывающие гармонические затухающие колебания. Во всех случаях построены фазовые портреты и зависимости напряжения от времени. Установлено, что при влиянии случайной силы, представляющей аддитивный некоррелированный шум, устанавливается режим незатухающих колебаний, соответствующий периодическому прерывистому режиму трения, который является основной причиной разрушения трущихся деталей. Найдены условия, при которых периодический прерывистый режим наиболее выражен, а также параметры, при которых он не реализуется во всем диапазоне значений температуры поверхности трения.

PACS: 05.10.Gg, 62.20.Fe, 62.20.Qp, 64.60.-i, 68.60.-p

### Введение

В последние годы возрос интерес к исследованию процесса трения молекулярно-тонких слоев смазок, зажатых между двумя атомарно-гладкими твердыми поверхностями [1–3], при различных значениях приложенной нагрузки, давления, толщины слоев, при изменении скорости сдвига, температуры и т.д. Целью исследований является выяснение трибологических и реологических свойств ультратонких слоев смазочных материалов, которые качественным образом отличаются от свойств объемных смазок. Необходимость исследования таких отличий обусловлена развитием нанотехнологий и соответственно ростом потребности в создании низкоразмерных трущихся систем. Такие узлы трения используются в современных накопителях информации, аэрокосмических устройствах, миниатюрных двигателях, системах позиционирования в микроэлектронике и т.д. Следует отметить, что аналогичное поведение смазок наблюдается практически в каждом реальном механизме и вызвано их выдавливанием из-под поверхностей под действием приложенной нагрузки.

Наряду с экспериментами [1–3] проводились теоретическое описание граничного трения [4–7] и компьютерное моделирование [8]. Выяснено, что с уменьшением толщины слоя смазки в процессе трения ее физические свойства изменяются сначала количественно, затем изменения приобретают резкий качественный характер [9]. В частности, показано, что в установившемся режиме трения поведение слоя смазки может соответствовать многофазному состоянию, приводящему к прерывистому трению (stick-slip), т.е. к переходам между твердоподобными и жидкоподобными состояниями смазки. Однако жидкоподобное состояние резко отличается от основного состояния жидкости, особенно в случае цепных

молекул типа гексадекана. Главным образом представляют интерес динамические свойства слоев в граничном режиме, когда переходы между различными типами динамических состояний происходят во время скольжения. Недавние исследования скольжения поверхностей из слюды и кварца, где в качестве смазки использовался целый ряд веществ (монослои металлов, органические жидкости, вода), показали, что такие фазовые переходы являются скорее правилом, чем исключением. Они проявляются в наличии прерывистого движения, которое характеризуется переходами между двумя или более динамическими состояниями. Понимание механизмов прерывистого режима трения важно в трибологии, так как он является одной из основных причин повреждения и износа трущихся деталей. Однако прерывистый режим трения представляет собой более распространенное явление. Это причина звуков скрипки и скрипящей двери, а также гудения машин и т.п.

Исследование свойств ультратонких слоев требует специального высокотехнологичного оборудования, что связано с их наноразмерами. Однако несмотря на сложность существуют экспериментальные установки и соответствующие методики [10], позволяющие измерять толщину молекулярных слоев, их вязкость, коэффициент трения, сдвиговые компоненты вязких и упругих напряжений и т.д.

В работе [7] на основе реологического описания вязкоупругой среды, обладающей теплопроводностью, получена система кинетических уравнений, которые определяют взаимно согласованное поведение сдвиговых напряжений  $\sigma$  и деформации  $\epsilon$ , а также температуры  $T$  в ультратонкой пленке смазки в процессе трения между атомарно-гладкими твердыми поверхностями. В рамках этой теории исследовано влияние аддитивных некоррелированных шумов на плавление смазки [11], рассмот-

рено плавление за счет диссипативных эффектов [12], проведен учет корреляций температуры [13], различных температурных зависимостей вязкости [14], исследованы гистерезисные явления при плавлении [15,16]. Однако в этих работах обнаружен прерывистый режим стохастического характера, когда с течением времени статическая и кинетическая силы трения изменяются случайным образом. Хотя этот режим найден экспериментально [17] и с помощью методов молекулярной динамики [8], чаще прерывистый режим граничного трения имеет периодический характер [1,5,6,8]. Предлагаемая работа предпринята с целью выяснения причин возникновения и особенностей данного режима в рамках реологической модели [7].

## 1. Периодический прерывистый режим

В работе [7] предложена модель, описывающая плавление тонкого слоя смазки между твердыми телами, основанная на системе безразмерных уравнений вида

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + g\varepsilon, \quad (1)$$

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + (T - 1)\sigma, \quad (2)$$

$$\tau_T \dot{T} = (T_e - T) - \sigma\varepsilon + \sigma^2, \quad (3)$$

где  $\sigma$  — сдвиговая компонента напряжений, возникающих в смазке;  $\varepsilon$  — сдвиговая компонента относительных деформаций;  $T$  — температура смазки. Здесь также введены константа  $g < 1$ , численно равная отношению модуля сдвига смазки к его характерному значению, и температура поверхностей трения  $T_e$ . Показано, что нулевые стационарные напряжения  $\sigma_0$  соответствуют твердоподобной структуре смазки, а при  $\sigma_0 \neq 0$  смазка плавится и переходит в жидкоподобное состояние.

Рассмотрим стационарные состояния, когда все производные в уравнениях (1)–(3) равны нулю, а параметры смазки со временем не изменяются. Как показывает анализ системы, в этом случае при температуре поверхностей трения  $T_e$  меньше критической

$$T_{c0} = 1 + g^{-1} \quad (4)$$

реализуется стационарное значение сдвиговых напряжений  $\sigma_0 = 0$ , а при  $T_e > T_{c0}$  устанавливается значение

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{gT_e - (g + 1)}{1 - g}}, \quad (5)$$

соответствующее жидкостному режиму трения. Поведение системы до установления стационарного состояния сильно зависит от соотношений между временами релаксации. Рассмотрим случаи, когда значение одного из времен можно положить малым.

### 1.1. Случай $\tau_T \ll \tau_\sigma, \tau_\varepsilon$

При этом в уравнении (3) положим  $\tau_T \dot{T} \approx 0$ , выразим из него  $T$  и, подставив в (2), получим двухпараметрическую систему (1), (2). Теперь два полученных дифференциальных уравнения первого порядка, зависящих от напряжения  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$ , сведем к одному уравнению второго порядка для  $\sigma$ . С этой целью из (1) необходимо выразить  $\varepsilon$  через  $\sigma$ , и записать производную по времени от этого выражения. Далее, подставив полученные зависимости  $\varepsilon(\sigma, \dot{\sigma})$ ,  $\dot{\varepsilon}(\sigma, \dot{\sigma})$  в (2), найдем искомого уравнение. При измерении времени в единицах  $\tau_\sigma$  оно запишется в виде

$$\ddot{\sigma} + \frac{1 + \tau + \sigma^2}{\tau} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} [1 + \sigma^2 - g(T_e - 1 + \sigma^2)] = \xi(t), \quad (6)$$

где  $\tau = \tau_\varepsilon/\tau_\sigma$ . В (6) дополнительно учтено влияние случайной силы  $\xi(t)$ , которая имеет моменты

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \quad (7)$$

где  $D$  играет роль интенсивности стохастического источника.

Запишем (6) в каноническом виде:

$$\ddot{\sigma} + 2\beta\dot{\sigma} + \omega_0^2\sigma = \xi(t), \quad (8)$$

где коэффициент затухания  $\beta$  и собственная частота колебаний  $\omega_0$  зависят от величины напряжений. Поскольку в стационарном состоянии при  $D = 0$  в системе устанавливается постоянное значение напряжений ( $\dot{\sigma} = 0$ ), оно может быть найдено при приравнивании последнего слагаемого левой части (6) к нулю и совпадает с (5). Из уравнения (6) легко найти значение коэффициента затухания в окрестности стационарной точки  $\sigma_0$ . Для этого необходимо значение (5) подставить в (6) и сравнить полученное уравнение с (8). Искомый коэффициент запишется в виде

$$\beta = 0.5\tau^{-1}(g^{-1} - 1)^{-1}(\tau(g^{-1} - 1) + T_e - 2). \quad (9)$$

Однако, чтобы однозначно говорить о характере колебаний, необходимо также найти  $\omega_0$  и анализировать частоту затухающих колебаний

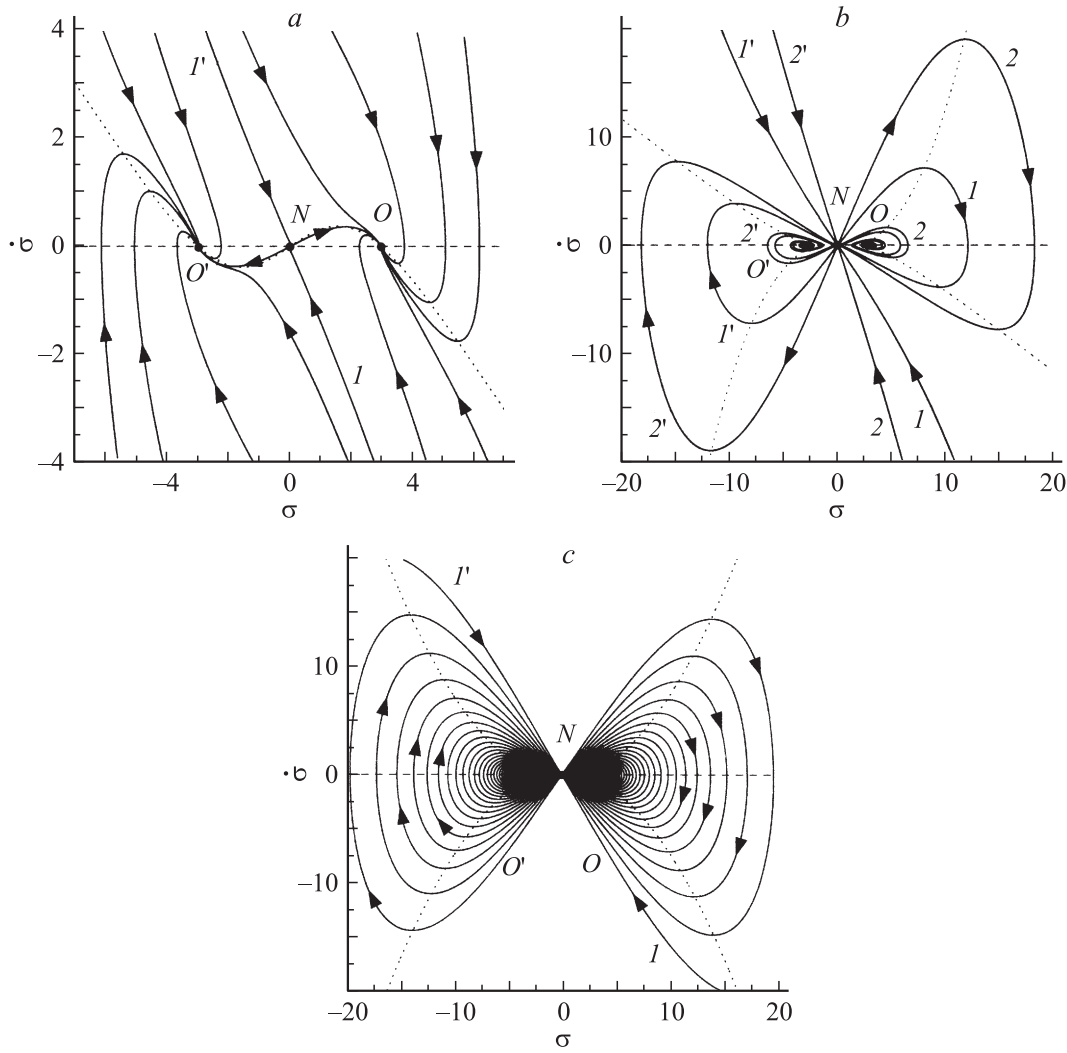
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Такой подробный анализ указанной системы проведен в [18] и поэтому не является целью настоящей работы.

Для численного решения уравнения (8) введем замену  $y = \dot{\sigma}$ , тогда оно запишется как

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= y, \\ \dot{y} &= -2\beta y - \omega_0^2\sigma + \xi(t), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\beta$  и  $\omega_0$  следуют из сопоставления (6) и (8). Далее воспользуемся для интегрирования методом Эйлера.



**Рис. 1.** Фазовые портреты системы при параметрах  $g = 0.3$ ,  $T_e = 25$  и интенсивности шума  $D = 0$ , представляющие: *a*) решение уравнения (6) при  $\tau = \tau_\epsilon/\tau_\sigma = 15$ ; *b*) решение уравнения (13) при  $\tau = \tau_T/\tau_\sigma = 120$ ; *c*) решение уравнения (15) при  $\tau = \tau_T/\tau_\epsilon = 120$ .

При этом итерационная процедура имеет вид [12,13]

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_1 + y_1 \Delta t, \\ y_2 &= y_1 + (-2\beta y_1 - \omega_0^2 \sigma_1) \Delta t + \sqrt{\Delta t} W_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Для моделирования случайной силы  $W_n$  используется модель Бокса–Мюллера [19]:

$$W_n = \sqrt{2D} \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2), \quad r_i \in (0, 1], \quad (12)$$

где псевдослучайные числа  $r_1$  и  $r_2$  имеют равномерное распределение.

Численное решение уравнения (6) с помощью процедуры (11), (12) в виде фазового портрета показано на рис. 1, *a*. Здесь штриховой линией показана изоклина, на которой  $\dot{\sigma} = 0$ , и фазовые траектории имеют вертикальную касательную. В рассматриваемых координатах данная изоклина является осью абсцисс. Пунктиром показана изоклина  $\ddot{\sigma} = 0$ , на которой фазовые траектории имеют горизонтальную касательную. Выражение для этой

изоклины  $\dot{\sigma}(\sigma)$  получается из уравнения (6). Из рисунка видно, что реализуются три особые точки — седло  $N$  в начале координат, которое представляет неустойчивую точку, так как соответствует максимуму синергетического потенциала [7], и две устойчивые симметричные относительно значения  $\sigma = 0$  точки  $O, O'$ . Вблизи этих точек при установлении стационарного значения  $\sigma_0$  видна тенденция к колебательному процессу, который, однако, не реализуется, потому что велико значение коэффициента затухания. Для рассматриваемого соотношения между временами релаксации такое поведение проявляется во всем диапазоне параметров [18]. Отметим, что положительные и отрицательные значения напряжений соответствуют движению верхней поверхности трения в различные стороны. Так, при начальном положительном значении  $\sigma$  (которое пропорционально скорости сдвига) и отрицательном значении  $\dot{\sigma}$  (ускорение), согласно рисунку, возможно реверсивное движение.

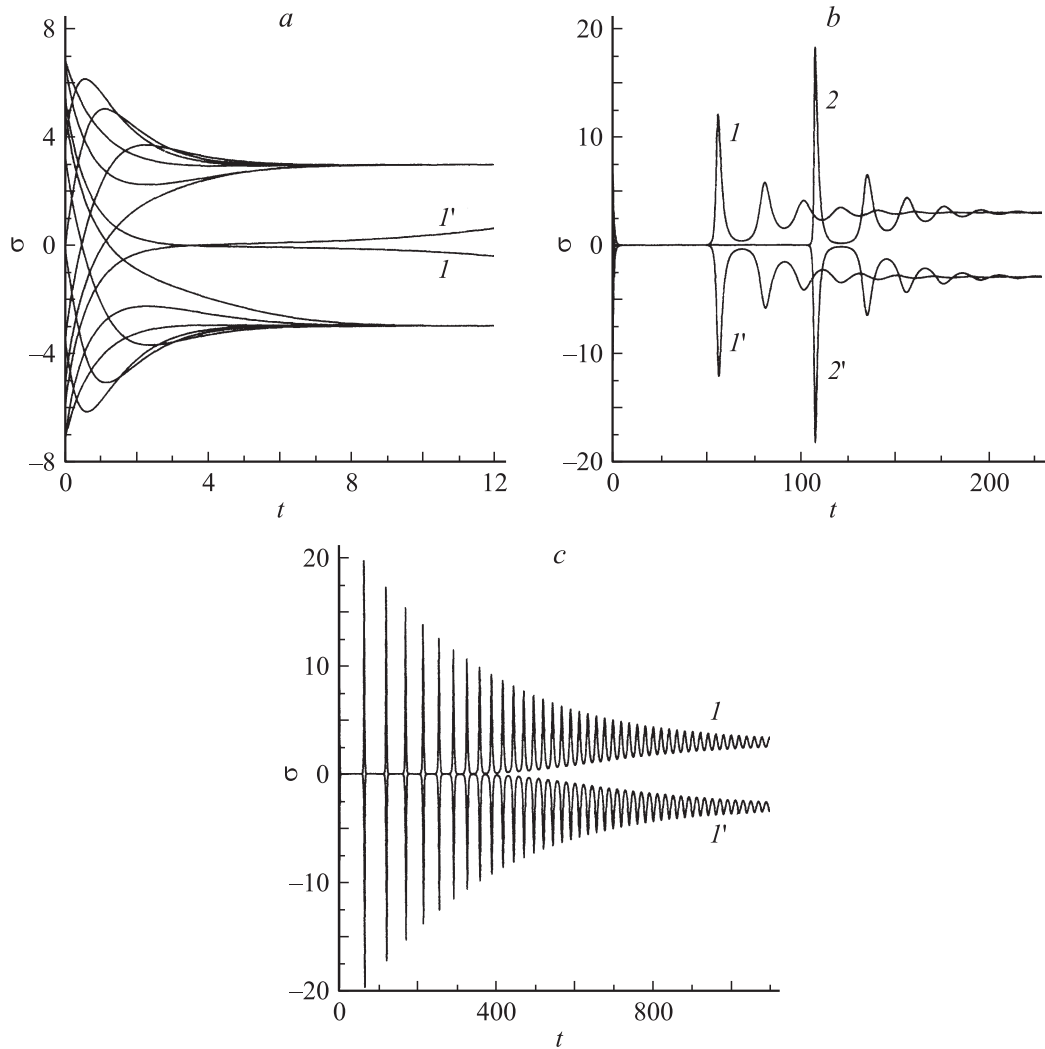


Рис. 2. Временные зависимости напряжений  $\sigma(t)$ , соответствующие рис. 1.

На рис. 2, *a* показаны временные зависимости напряжений, соответствующие траекториям рис. 1, *a*. Эти зависимости представляют аperiodический переходный прерывистый режим, в котором до установления скольжения с постоянной скоростью ( $\sigma = \text{const}$ ) изменяются значения напряжения.

На рис. 3, *a* приведено решение того же уравнения, что и на рис. 2, *a*, при  $D \neq 0$ . Видно, что с течением времени значения напряжения изменяются случайным образом, однако в небольших пределах (поскольку интенсивность шума мала), что соответствует режиму скольжения практически с постоянной скоростью. Зависимость приведена с момента времени  $t = 1000$ , поскольку в рамках данной работы нас интересует не переходной, а устанавливающийся стационарный режим трения.

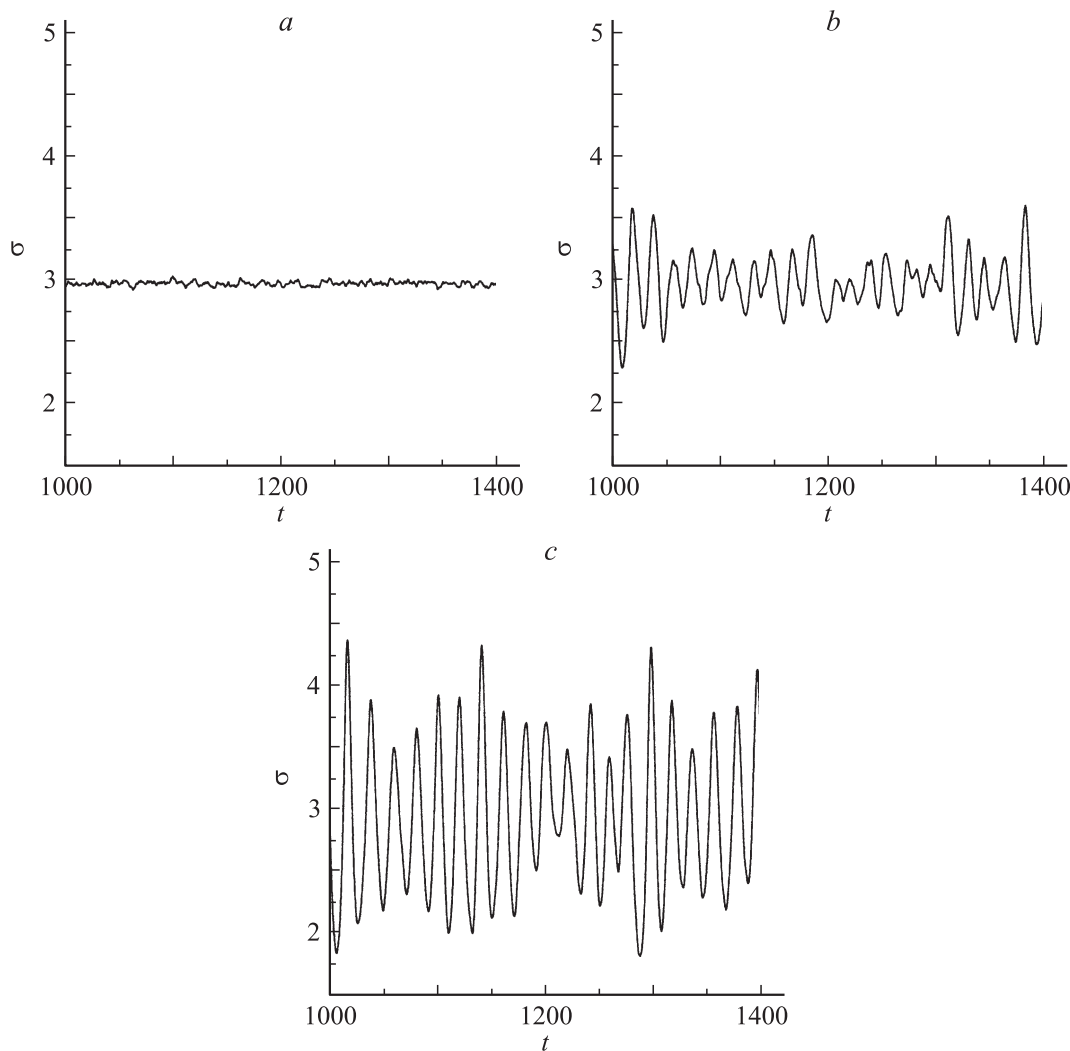
На рис. 4, *a* приведена зависимость мощности сигнала, приведенного на рис. 3, *a* от его частоты. Видно, что при малых частотах  $S(\nu) = \text{const}$ , а далее она убывает. Убывание связано с тем, что уравнение (6) для белого

шума  $\xi(t)$  является фильтром, который не пропускает высоких частот, окрашивая шум в определенный цвет. На зависимости  $S(\nu)$  нет выраженных максимумов, что свидетельствует об отсутствии периодической составляющей в зависимости  $\sigma(t)$ . Таким образом, с течением времени в рассматриваемом случае устанавливается режим скольжения с незначительно флуктуирующей скоростью сдвига.

## 1.2. Случай $\tau_\varepsilon \ll \tau_T, \tau_\sigma$

В этом случае в исходной системе используется приближение  $\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} \approx 0$ , которое при измерении времени в единицах  $\tau_\sigma$  приводит к уравнению

$$\ddot{\sigma} + \left[ \frac{1 + \sigma^2}{\tau} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right] \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} [1 + \sigma^2 - g(T_e - 1 + \sigma^2)] = \xi(t), \quad (13)$$



**Рис. 3.** Временные зависимости напряжений  $\sigma(t)$ , соответствующие рис. 1, 2, при интенсивности шума  $D = 4 \cdot 10^{-4}$ .

в котором введено отношение  $\tau = \tau_T / \tau_\sigma$ . Последнее уравнение описывает колебания с коэффициентом затухания

$$\beta = 0.5\tau^{-1}(g^{-1} - 1)^{-1}(T_e - 2). \quad (14)$$

Фазовый портрет, полученный при решении (13), показан на рис. 1, *b*. Видно, что на рисунке реализуются те же особые точки с тем отличием, что точки  $O, O'$  преобразуются в устойчивые фокусы, и в системе реализуются затухающие колебания. Цифрами на рисунке обозначены фазовые траектории. Изоклина, показанная пунктиром, отличается от предыдущего случая. Это связано с тем, что в уравнении (13) коэффициент затухания становится зависимым от  $\dot{\sigma}$ , и при приравнивании  $\dot{\sigma} = 0$  выражение для изоклины  $\dot{\sigma}(\sigma)$  дается решением квадратного уравнения, поэтому зависимость становится двузначной.

На соответствующих временных зависимостях (рис. 2, *b*) видны продолжительные участки, на которых  $\sigma \approx 0$ , что соответствует медленному движению трущихся поверхностей. Это связано с тем, что при эволюции системы конфигуративная точка на фазовом

портрете проходит вблизи начала координат ( $\sigma \approx 0$ ) с малой скоростью изменения напряжений ( $\dot{\sigma} \approx 0$ ). Однако всегда устанавливается ненулевое значение напряжений, отвечающее скольжению. При этом переход к реверсивному движению не осуществляется, что говорит о более высоком максимуме потенциала в начале координат.

Найденная зависимость  $\sigma(t)$  при действии шума, показанная на рис. 3, *b*, как и ранее, представляет установившийся режим, параметры которого со временем не изменяются. Зависимость визуально является периодической. Чтобы подтвердить этот факт, дополнительно проведен фурье-анализ. На рис. 4, *b* на зависимости  $S(\nu)$ , видно, что с ростом частоты составляющей сигнала его мощность спадает, однако при  $\nu \approx 0.05$  наблюдается пик, что свидетельствует о наличии периодической составляющей в  $\sigma(t)$ . Таким образом, на рис. 3, *b* реализуются периодические изменения напряжений, что соответствует колебательному процессу в системе. При этом происходят переходы между жидкоподобной струк-

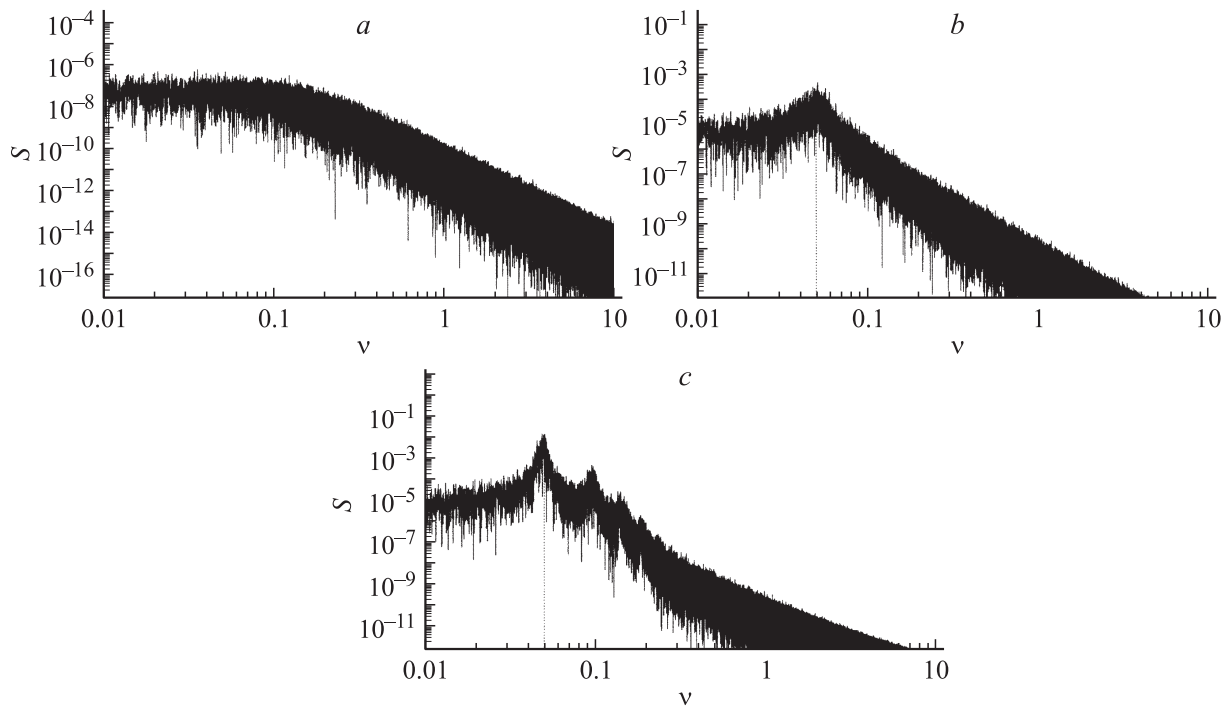


Рис. 4. Спектральные плотности мощности  $S(\nu)$ , соответствующие рис. 3.

турой смазки и твердopodobной, приводящие к *stick-slip* режиму.

Ранее полагалось, что твердopodobной структуре соответствуют нулевые напряжения, а когда они становятся ненулевыми при повышении температуры  $T_e$  выше критического значения, смазка плавится. Здесь же реализуется следующая ситуация. Пусть в начале напряжения минимальны, что, как и ранее, соответствует твердopodobной смазке. Если привести поверхности в движение,  $\sigma$  растут (любой восходящий участок зависимости на рис. 3, *b*). При превышении напряжениями критического значения происходит плавление, затем упругая компонента  $\sigma_{el}$  релаксирует, суммарные напряжения также уменьшаются (убывающий участок зависимости). Когда напряжения в результате релаксации приобретают значения, недостаточные для поддержания смазки в жидкоподобном состоянии, она затвердевает, и процесс повторяется. Таким образом, как и ранее, плавление происходит при больших напряжениях. Отметим, что описанный режим отличается от показанного на рис. 3, *a*. В рассматриваемом случае осуществляются периодические переходы между твердopodobной и жидкоподобной структурами смазки, а рис. 3, *a* соответствует жидкоподобной структуре, и случайные изменения напряжений на нем представляют флуктуации, не приводящие к плавлению/затвердеванию. Поскольку зависимость на рис. 3, *b* не является строго периодической, такой режим отвечает экспериментам с цепными молекулами [1], которым сложно образовывать упорядоченные структуры, за счет чего на колебания накладываются флуктуации. При этом амплитуда переходов *stick-slip* не постоян-

на. Более того, влияние флуктуаций может привести к неустойчивости фокуса, что означает непрерывное увеличение амплитуды колебаний напряжений, схожее с резонансом в системе.

### 1.3. Случай $\tau_\sigma \ll \tau_e, \tau_T$

Здесь, положив  $\tau_\sigma \dot{\sigma} \approx 0$  и измерив время в единицах  $\tau_e$ , получим

$$\dot{\sigma} + \left[ \frac{1}{\tau} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right] \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} [1 + \sigma^2 - g(T_e - 1 + \sigma^2)] = \xi(t), \quad (15)$$

где  $\tau = \tau_T/\tau_e$ . Коэффициент затухания в этом случае определится как

$$\beta = 0.5\tau^{-1}. \quad (16)$$

В отличие от предыдущих двух случаев  $\beta$  зависит только от параметра  $\tau$ , и с его ростом уменьшается, что позволяет говорить о том, что с ростом  $\tau$  колебания становятся более продолжительными. Поэтому вокруг фокуса на рис. 1, *c* до установления стационарного состояния осуществляется большее количество колебаний, чем в предыдущем случае. Об этом также свидетельствует рис. 2, *c*, на котром реализуются продолжительные колебания, не затухающие даже при  $t = 1000$ . На рис. 3, *c* показана зависимость напряжений от времени при действии шума (для всех рассматриваемых случаев  $D = \text{const}$ ), которая является более гладкой и регулярной, чем на рис. 3, *b*.

Соответствующий спектр (рис. 4, *c*) имеет при  $\nu \approx 0.05$  более узкий пик, чем на рис. 4, *b*. Имеются и

другие пики, однако они обладают меньшей мощностью и более размыты, поэтому основная частота  $\nu \approx 0.05$ . На рис. 3, *c* приведена зависимость на временном интервале  $\delta t = 400$ , что при указанной частоте соответствует 20 полным колебаниям, которые и реализуются на зависимости. Можно сделать вывод, что в этом случае реализуется более стабильный во времени режим *stick-slip* с большей амплитудой. Таким образом, возникновение прерывистого трения следует ожидать в системах с  $\tau_\sigma \ll \tau_\varepsilon \ll \tau_T$ . Отметим, что при параметрах рис. 2 ( $g = 0.3$ ,  $T_e = 25$ ), согласно формуле (5), во всех рассматриваемых случаях с течением времени устанавливается стационарное значение напряжений  $\sigma_0 \approx 2.9761$ . Как видно из рис. 3, влияние шума может приводить как к небольшим флуктуациям вблизи стационарного значения  $\sigma_0$  (рис. 3, *a*), так и влиять на систему критическим образом, изменяя характер режима трения (рис. 3, *b, c*).

## Заключение

Проведенное рассмотрение показывает, что наблюдаемый экспериментально периодический прерывистый режим трения может быть описан в рамках реологической модели, параметризуемой сдвиговыми напряжениями, деформацией и температурой поверхностей трения. Основная особенность найденного режима состоит в том, что в нем с течением времени переходы между жидкоподобной и твердоподобной структурами смазки осуществляются при различных значениях напряжения, что обусловлено влиянием на систему флуктуаций, которые и приводят к периодическому режиму. Показано, что наиболее стабильный периодический прерывистый режим реализуется в случае, когда самым малым является время релаксации напряжений, за ним по величине следует время релаксации деформации, а самое большое время релаксации температуры. В случае, когда самое малое значение имеет время релаксации температуры, периодический режим в системе невозможен. По-видимому, это обусловлено быстрой передачей тепловой энергии от смазки к поверхностям трения в процессе диссипации за счет процессов теплопроводности.

Выражаем благодарность Государственному фонду фундаментальных исследований Украины (гранты Ф25/668-2007, Ф25/97-2008) за поддержку работы.

## Список литературы

- [1] Yoshizawa H., Israelachvili J. // J. Chem. Phys. 1993. Vol. 97. P. 11 300–11 313.
- [2] Reiter G., Demirel A.L., Peanasky J., Cai L.L., Granick S. // J. Chem. Phys. 1994. Vol. 101. P. 2606–2615.
- [3] Demirel A.L., Granick S. // J. Chem. Phys. 1998. Vol. 109. P. 6889–6897.
- [4] Понов В.И. // ЖТФ. 2001. Т. 71. С. 100–110.
- [5] Filippov A.E., Klafter J., Urbakh M. // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92. P. 135 503 (4).
- [6] Tshiprut Z., Filippov A.E., Urbakh M. // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 016 101 (4).
- [7] Khomenko A.V., Yushchenko O.V. // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 036 110 (6).
- [8] Braun O.M., Naumovets A.G. // Surf. Sci. Rep. 2006. Vol. 60. P. 79–158.
- [9] Aranson I.S., Tsimring L.S., Vinokur V.M. // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 65. P. 125 402 (7).
- [10] Israelachvili J. // Surf. Sci. Rep. 1992. Vol. 14. P. 109–159.
- [11] Хоменко А.В., Ляшенко Я.А. // ЖТФ. 2005. Т. 75. С. 17–25.
- [12] Хоменко А.В., Ляшенко Я.А. // ЖТФ. 2007. Т. 77. С. 137–140.
- [13] Khomenko A.V., Lyashenko I.A. // Fluctuation and Noise Letters. 2007. Vol. 7. P. L111–L133.
- [14] Khomenko A.V., Lyashenko I.A. // Cond. Matt. Phys. 2006. Vol. 9. P. 695–702.
- [15] Хоменко А.В., Ляшенко Я.А. // ФТТ. 2007. Т. 49. С. 886–890.
- [16] Khomenko A.V., Lyashenko I.A. // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 366. P. 165–173.
- [17] Nanotribology and Nanomechanics / Ed. by B. Bhushan. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 1148 p.
- [18] Хоменко А.В., Проданов Н.В. // ФТВД. 2006. Т. 16. С. 164–179.
- [19] Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. NY: Cambridge University Press, 1992. 1020 p.